Notas

# La interpolación polinomial en el análisis de métodos iterativos


## Resumen

La solución de ecuaciones no lineales es de extrema importancia en la ingeniería y ciencias. Los métodos que se estudian para resolver las ecuaciones no lineales se obtienen a partir de diversos desarrollos tales como el teorema de Taylor, teoremas de punto fijo y sustituciones diversas. En la mayoría de estos casos la obtención del orden de convergencia se evita ya sea por su complejidad o por falta de herramientas necesarias para obtener tales resultados. En esta nota introduciremos una manera general de obtener algunos de los métodos iterativos más comunes y de analizar su orden de convergencia basados en la interpolación polinomial.


## Introducción

Los métodos iterativos para resolver ecuaciones lineales son herramientas indispensables en las áreas de ciencias e ingeniería. Dentro de los métodos iterativos más importantes y comunes qué se estudian (Ostrowski, 1960), (Ortega y Rheinboldt, 1970), se encuentran el método de la secante, el método de Newton – Raphson, el método de Steffensen, y el método de Newton para raíces múltiples. En lo que sigue definiremos los métodos iterativos mencionados anteriormente y los conceptos de orden de convergencia y constante asintótica asociada a cada uno de ellos.

Consideremos una función continua $f:I\rightarrow\mathbf{R}$ suficientemente diferenciable en un intervalo $I\subset\mathbf{R}$ y sea $r\in I$ una raíz simple de la función f. Supongamos que $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ es una sucesión que converge a $r$, con $x_{n\neq r}$ para toda $n$. Si existen constantes positivas λ y α con

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^{\alpha}}=\lambda$$

entonces $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ converge a $r$ con orden α y una constante asintótica λ. A la expresión $\varepsilon_n=|x\_n-r|$, para todo $n\geq1$, se le llama el error n-ésimo del método iterativo y por tanto la ecuación anterior puede escribirse como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\alpha}}=\lambda$$

El método de Newton se obtiene a partir del desarrollo de Taylor y se define del siguiente modo; dada una aproximación inicial $x_0$, se genera la sucesión $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ definida por:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\text{ para } n\geq 0.$$

El método de Newton es uno de los métodos iterativos más importantes y tiene orden de convergencia 2 (cuadrática).

Utilizando la aproximación de la derivada de la función $f$ en el punto $x_n$ como:

$$f'(x_n)\approx\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}},$$

donde $x_{n-1}$ es un punto suficientemente cercano a r diferente de x_n, se obtiene el método de la secante. Esto es, dadas dos aproximaciones iniciales $x_0$,$x_1$, se genera la sucesión $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \text{ para } n \geq 1.$$

El método de la secante posee la ventaja de no utilizar la derivada de la función y su orden de convergencia es 1.862. En este sentido, tiene un orden de convergencia menor que el método de Newton, pero al no usar la derivada requiere menos tiempo máquina para el cálculo de las operaciones.

El método de Aitken, llamado método $\Delta^2$ de Aitken, sirve para acelerar la convergencia de una sucesión que sea linealmente convergente. Si se aplica un método $\Delta^2$ de Aitken a una sucesión linealmente convergente obtenida mediante la iteración de punto fijo, podemos acelerar la convergencia a cuadrática. A este procedimiento se le conoce como método de Steffensen. Dada una aproximación inicial $x_0$, se genera la sucesión $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))}, \text{ para } n \geq 1.$$

El método de Steffensen es uno de los más serios competidores del método de Newton ya que tiene orden de convergencia 2, y al igual que el método de la secante no utiliza el cálculo de la derivada de la función *f*.

Para el caso de raíces múltiples de una función *f*, tenemos dos maneras comunes de aproximar la raíz. Supongamos que la función continua $f:I \to \mathbf{R}$ es suficientemente diferenciable en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$ y sea $r \in I$ una raíz de multiplicidad m de la función *f*.

El método de Newton modificado se obtiene al introducir la función auxiliar

$$\mu(x) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a la cual se le aplica el método de Newton. De este modo, si $x_0$ es una aproximación inicial, se genera la sucesión $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

la cual es cuadráticamente convergente sin importar la multiplicidad de la raíz. El inconveniente en este caso es el uso de la segunda derivada $f''(x_n)$.

Si consideramos la multiplicidad de la raíz buscada y evitamos el uso de la segunda derivada, podemos definir una variante del método de punto fijo desarrollada por (Ralston y Rabinowitz, 1978) que se obtiene del siguiente modo; si x_0 es una aproximación inicial, se genera la sucesión $\{x_n\}^{\infty}_{n=0}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{mf(x_n)}{f'(x_n)},$$

que es también cuadráticamente convergente y donde *m* es la multiplicidad de la raíz. Naturalmente, conocer esta multiplicidad y usarla es el único inconveniente de este método.

Todos los métodos mencionados en esta sección tienen sus propias herramientas para establecer sus demostraciones y tienen diversos grados de complejidad en el análisis de sus órdenes de convergencia. La mayoría de estos análisis no son presentados en libros de análisis numérico precisamente por tal complejidad. El objetivo de esta nota es el uso de un método común a todos ellos que nos permita de una manera clara saber su convergencia y rapidez de convergencia.

## Desarrollo

### Teoría General de Interpolación y Análisis de Error

El uso de polinomios en el estudio de diferentes temas en el análisis se debe a que son las funciones más simples de estudiar, aunado a qué tanto su derivada como la integral indefinida de un polinomio son fáciles de determinar y también son polinomios. El resultado más importante que nos permite utilizar polinomios para analizar funciones continuas es el teorema de Weierstrass que afirma:

TEOREMA 1: Suponga que f está definida y es continua en [a,b]. Para cada $\epsilon>0$, existe un polinomio P(x), con la propiedad de que

$$f(x)\text{-}P(x)| < \epsilon, \text{ para toda } x \in [a,b].$$

En general, la manera más práctica de aproximar una función continua mediante un polinomio es utilizar la interpolación de Lagrange. Esta se basa en el siguiente resultado.

TEOREMA 2: Si $x_0, x_1, \ldots, x_n \in R$ son n+1 reales distintos y si f es una función cuyas evaluaciones $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n) \in \mathbf{R}$ son conocidas, entonces existe un único polinomio P(x) de grado a lo más n, tal que

$f(x_k)=P(x_k)$, para cada $k=0,1,\ldots n$.

Este polinomio está dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n.k}(x)$$

donde para cada $k=0,1,\ldots,n$,

$$L_{n.k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}.$$

Además, si suponemos que $f$ es suficientemente diferenciable en [a,b], entonces para cada x∈[a,b] existe ξ(x) ∈ (a,b) tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

La demostración de la segunda parte del teorema se basa en la construcción de una función auxiliar del tipo

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{k=0}^{n} \frac{t - x_k}{x - x_k},$$

en la cual usamos el teorema generalizado de Rolle que afirma:

TEOREMA 3: Supongamos que $f$ es una función continua en [a,b] al menos n veces diferenciable en (a,b). Si f(x) se anula en los n+1 valores reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, entonces existe un número real ξ∈(a,b) tal que $f^{(n+1)}(\xi)=0$.

Los polinomios *osculantes* representan una generalización de los polinomios de Taylor y de Lagrange.

TEOREMA 4: Sean $x_0$, $x_1$, …, $x_n$, n+1 números distintos en [a,b] y $m_i$ un entero no negativo asociado a $x_i$, i=0 ,1,2,…,n. Suponga que $f \in C^m$ [a,b] y que $m = \max_{0\le i\le n} m_i$. El polinomio osculante que aproxima $f$ es el polinomio P($x$) de menor grado tal que

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad \text{para cada } i=0,1,2,\ldots,n \text{ y } k=0,1,2,\ldots,m_i.$$

Nótese que cuando $n=0$, el polinomio osculante que aproxima f es simplemente el polinomio $m_0$-ésimo de Taylor para f en $x_0$. Cuando $m_i=0$ para cada $i$, el polinomio osculante es el n-ésimo polinomio de Lagrange que interpola $f$ en $x_0$, $x_1$,…, $x_n$. Cuando $m_i=1$ para cada i=0,1,2,…,$n$, se produce una clase de polinomios denominados polinomios de Hermite.

En lo que sigue se hallarán diversos polinomios osculantes mediante los cuales podremos deducir los distintos métodos iterativos vistos en la introducción y hallar sus respectivos órdenes de convergencia y constantes asintóticas. En realidad, la interpolación polinomial, desarrollada de esta forma, permite incluso obtener nuevos métodos iterativos (Burden y Faires, 2011) y (Traub, 1964).

Obtención de Métodos Iterativos

En lo que sigue consideraremos una función continua $f:I \rightarrow \mathbf{R}$ suficientemente diferenciable en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$ y supondremos que existe r∈I raíz simple de la función $f$.

## 1)Método de Newton – Raphson.

Sea dada una aproximación inicial $x_k \in I$. Sea $P(x)=A(x-x_k)+B$. Supongamos que se verifica

$P(x_k)=f(x_k)$ y $P'(x_k)=f'(x_k)$.

Entonces tenemos,

$B=f(x_k)$ y $A=f'(x_k)$.

Por lo tanto, $P(x)=A(x-x_k)+B=0$ implica

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f\prime(x_k)}.$$

Esto define el método de Newton (2) escribiendo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f\prime(x_k)}.$$

Para el análisis de error, consideremos la función

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t-x_k)^2}{(x-x_k)^2}.$$

Por el teorema de Rolle generalizado, ya que g($t$) se

$$g'(t) = f'(t) - P'(t) - [f(x) - P(x)] \frac{2(t-x_k)}{(x-x_k)^2},$$

se anula para $t=\xi_1$ y $t=x_k$, con $\xi_1$ entre $x$ y $x_k$. Nuevamente por el teorema generalizado de Rolle, se sigue que

$$g''(t) = f''(t) - P''(t) - [f(x) - P(x)]\frac{2}{(x-x_k)^2},$$

se anula para $t=\xi_2$, con $\xi_2$ entre $\xi_1$ y $x_k$. Pero $P''=0$,

$$g''(\xi_2) = f''(\xi_2) - [f(x) - P(x)]\frac{2}{(x-x_k)^2} = 0,$$

de donde

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_k)^2 f''(\xi_2)}{2},$$

así, para $x=r$ tenemos

$$-P(r) = \frac{(r-x_k)^2 f''(\xi_2)}{2} = \frac{f''(\xi_2)}{2}\varepsilon_k^2,$$

reescribiendo $P(r)$ en términos de $x_{(k+1)}$ y considerando que $P(x_{k+1})=0$, tenemos que

$$P(r) = P(x_{k+1}) + A(r - x_{k+1}) = f'(x_k)\varepsilon_{k+1}.$$

De este modo, tenemos

$$\varepsilon_{k+1} = -\frac{f''(\xi_2)}{2f'(x_k)}\varepsilon_k^2,$$

de donde

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\xi_2)}{2f'(x_k)} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}.$$

La expresión anterior implica, por (1), que el orden de convergencia del método de Newton es $\alpha=2$ con constante asintótica $\lambda = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}$.

## 2) Método de Steffensen.

En este caso, dada una aproximación inicial $x_k \in I$. Sea $P(x)=A(x - x_k)+B$. Supongamos que se verifica

$$P(x_k) = f(x_k) \text{ y } P(x_k - f(x_k)) = f(x_k - f(x_k)).$$

Entonces tenemos,

$$\boldsymbol{B = f(x_k) \text{ y } B - Af(x_k) = f(x_k - f(x_k))}.$$

De donde,

$$\boldsymbol{B = f(x_k) \text{ y } A = \frac{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))}{f(x_k)}}.$$

Por lo tanto, $P(x)=A(x - x_k)+B=0$ implica

$$\boldsymbol{x = x_k - \frac{B}{A} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))}}.$$

Lo anterior define el método de *Steffensen* (4) escribiendo

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))}}.$$

Para el análisis de error, consideremos la función auxiliar

$$\boldsymbol{g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t-x_k)(t-x_k+f(x_k))}{(x-x_k)(x-x_k+f(x_k))}}.$$

Por el teorema de Rolle generalizado, ya que $g(t)$ se anula en los puntos $t=x$, $t=x_k$ y $t=x_k - f(x_k)$, se sigue que

$$\boldsymbol{g''(t) = f''(t) - P''(t) - [f(x) - P(x)]\frac{2}{(x-x_k)(x-x_k+f(x_k))}},$$

se anula para algún $t=\xi_1$.

Pero $P''=0$, además, del teorema de Taylor para $f(x_k)$ alrededor de $x=r$, para algún $\xi_2$, sabemos que $f(x_k)=f(r)+f'(\xi_2)(x_k - r)=f'(\xi_2)(x_k - r)$, luego tenemos para $x=r$,

$$\boldsymbol{-P(r) = \frac{(r-x_k)(r-x_k-f'(\xi_2)(r-x_k))f''(\xi_1)}{2} = \frac{(1-f'(\xi_2))f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_k^2},$$

reescribiendo $P(r)$ en términos de $x_{(k+1)}$ y considerando que $P(x_{k+1})=0$, tenemos que

$$\boldsymbol{P(r) = P(x_{k+1}) + A(r - x_{k+1}) = \frac{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))}{f(x_k)}\varepsilon_{k+1}}.$$

De este modo, tenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon_{k+1} = -\frac{(1-f'(\xi_2))f''(\xi_1)}{2}\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))}\varepsilon_k^2},$$

de donde

$$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\lim_{k\to\infty}\frac{(1-f'(\xi_2))f''(\xi_1)}{2}\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_k-f(x_k))} = -\frac{(1-f'(r))f''(r)}{2f'(r)}}.$$

La expresión anterior implica que el orden de convergencia del método de Steffensen es $\alpha=2$ con constante asintótica $\boldsymbol{\lambda = -\frac{(1-f'(r))f''(r)}{2f'(r)}}$.

## 3) Método de la secante.

Dadas dos aproximaciones iniciales $x_{k-1}$, $x_k \in I$. Sea $P(x)=A(x - x_k)+B$. Supongamos que se verifica

$$\boldsymbol{P(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \text{ y } P(x_k) = f(x_k)}.$$

Entonces tenemos,

$$\boldsymbol{B = f(x_k) \text{ y } A(x_{k-1} - x_k) + B = f(x_{k-1})}.$$

De donde,

$$B = f(x_k) \text{ y } A = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Por lo tanto, P($x$)=A($x$ - $x_k$ )+B=0 implica

$$x = x_k - \frac{B}{A} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}.$$

Lo anterior define el método de la secante (3) escribiendo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}.$$

Para el análisis de error, consideremos la función auxiliar

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t-x_k)(t-x_{k-1})}{(x-x_k)(x-x_{k-1})}.$$

Por el teorema de Rolle generalizado, ya que g(t) se anula en los puntos $t=x$, $t=x_k$ y $t=x_{k-1}$, se sigue que

$$g''(t) = f''(t) - P''(t) - [f(x) - P(x)]\frac{2}{(x-x_k)(x-x_{k-1})},$$

se anula para algún $t=\xi_1$.

Pero P''=0, además, para $x=r$, tenemos,

$$-P(r) = \frac{(r-x_k)(r-x_{k-1})f''(\xi_1)}{2} = \frac{f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k,$$

reescribiendo P(r) en términos de $x_{k+1}$ y considerando que $P(x_{k+1})=0$, tenemos que

$$P(r) = P(x_{k+1}) + A(r - x_{k+1}) = -\frac{f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k.$$

De este modo, tenemos

$$\varepsilon_{k+1} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\frac{f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k,$$

de donde, si consideramos que la relación de convergencia es de la forma $\varepsilon_{k+1} \approx \lambda\varepsilon_k^{\alpha}$, entonces se tiene la ecuación

$$\lambda\varepsilon_k^{\alpha} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\frac{f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k,$$

de donde

$$\lambda(\lambda\varepsilon_{k-1}^{\alpha})^{\alpha} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\frac{f''(\xi_1)}{2}\varepsilon_{k-1}(\lambda\varepsilon_{k-1}^{\alpha}),$$

y a partir de esta sabemos que la única manera que las potencias de $\varepsilon_{k-1}$ sean iguales en ambos lados de la igualdad es que se verifique, $\alpha^2=\alpha+1$, de donde concluimos que el orden de convergencia es

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, que es precisamente el orden de convergencia del método de la secante. Por otro lado, tenemos que

$$\lambda^{\alpha} = -\lim_{k\to\infty}\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\frac{f''(\xi_1)}{2} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)},$$

de donde la constante asintótica del método de la secante es

$$\lambda = \left(-\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right)^{1/\alpha} = \left(-\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right)^{1-\alpha}.$$

En los casos anteriores se desarrollan los métodos usando un polinomio de primer grado; una línea recta, en los casos siguientes consideraremos polinomios de grado m que es la multiplicidad de la raíz buscada.

En lo que sigue consideraremos una función continua **f**: I → **R** suficientemente diferenciable en un intervalo I ⊂ R y supondremos que existe r ∈ I raíz de multiplicidad *m* de la función **f**.

## 4) Método variante de punto fijo

En este caso, sea una aproximación inicial $x_k \in I$. Sea P($x$)=A($x$ - $B$)$^m$. Supongamos que se verifica

$$P(x_k) = f(x_k) \text{ y } P'(x_k) = f'(x_k).$$

Entonces tenemos,

$$A(x_k - B)^m = f(x_k) \text{ y } mA(x_k - B)^{m-1} = f'(x_k).$$

De donde

$$\frac{x_k - B}{m} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ y por tanto, } B = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$$

De tal modo que la ecuación A (x - B)$^m$=0 implica

$$x = B = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Lo anterior define el método modificado de Newton (6) escribiendo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f\prime(x_k)}.$$

Para el análisis de error, consideramos que $f(x)=(x-r)^m g(x)$, con $g(r) \neq 0$. Entonces, tenemos

$$x_{k+1} - r = x_k - r - \frac{m(x_k-r)g(x_k)}{(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)} = \frac{(x_k-r)^2 g\prime(x_k)}{(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)},$$

Por tanto

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{g\prime(x_k)}{(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)}.$$

Bajo el límite, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\frac{g\prime(r)}{mg(r)}.$$

Usando la fórmula de Leibnitz para la derivada **m** -ésima de **f** , tenemos que

$$f^{(m)}(r) = m!\, g(r);\ f^{(m+1)}(r) = (m+1)m!\, g'(r).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\frac{g'(r)}{mg(r)} = -\frac{f^{(m+1)}(r)}{m(m+1)f^{(m)}(r)}.$$

La expresión anterior implica que el orden de convergencia del método variante de punto fijo es $\alpha=2$ con constante asintótica

$$\lambda = -\frac{f^{(m+1)}(r)}{m(m+1)f^{(m)}(r)}.$$

## 5)Método modificado de Newton

En este caso, dada una aproximación inicial $x_k \in I$. Sea $P(x)=A(x-B)^m$. Supongamos que se verifica

$$P(x_k) = f(x_k),\ P'^{(x_k)} = f'(x_k) \text{ y } P''(x_k) = f''(x_k).$$

Entonces tenemos,

$$A(x_k - B)^m = f(x_k), mA(x_k - B)^{m-1} = f'(x_k) \text{ y } m(m-1)A(x_k - B)^{m-2} = f''(x_k).$$

De donde,

$$B = x_k - \frac{mf(x_k)}{f\prime(x_k)} \text{ y },\ m = \frac{[f\prime(x_k)]^2}{[f\prime(x_k)]^2 - f(x_k)f\prime\prime(x_k)}$$

De tal modo que la ecuación $A(x-B)^m=0$ implica

$$x = B = x_k - \frac{mf(x_k)}{f\prime(x_k)}.$$

Sustituyendo

$$m = \frac{[f\prime(x_k)]^2}{[f\prime(x_k)]^2 - f(x_k)f\prime\prime(x_k)},$$

se tiene el método modificado de Newton (5) escribiendo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f\prime(x_k)}{[f\prime(x_k)]^2 - f(x_k)f\prime\prime(x_k)}.$$

Para el análisis del error, consideramos que $f(x)=(x-r)^m g(x)$, con $g(r) \neq 0$. Entonces, sustituyendo f(x), f'(x) y f''(x) y simplificando tenemos

$$x_{k+1} - r = x_k - r - \frac{(x_k-r)g(x_k)[(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)]}{[(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)]^2 - g(x_k)[(x_k-r)^2 g''(x_k)+2m(x_k-r)g'(x_k)+m(m-1)g(x_k)]} = x_k - r - \frac{(x_k-r)g(x_k)[(x_k-r)g'(x_k)+mg(x_k)]}{(x_k-r)^2[g'(x_k)]^2 - (x_k-r)^2 g(x_k)g''(x_k)+mg^2(x_k)}.$$

Por tanto,

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{(x_k-r)[g'(x_k)]^2 - (x_k-r)g(x_k)g''(x_k) - g(x_k)g'(x_k)}{(x_k-r)^2[g'(x_k)]^2 - (x_k-r)^2 g(x_k)g''(x_k)+mg^2(x_k)}.$$

Bajo el límite, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\frac{g\prime(r)}{mg(r)}.$$

Nuevamente, usando la fórmula de Leibnitz para la derivada m -ésima de f , tenemos que

$$f^{(m)}(r) = m!\, g(r);\ f^{(m+1)}(r) = (m+1)m!\, g'(r).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = -\frac{g'(r)}{mg(r)} = -\frac{f^{(m+1)}(r)}{m(m+1)f^{(m)}(r)}.$$

La expresión anterior implica que el orden de convergencia del método modificado de Newton es $\alpha=2$ con constante asintótica

$$\lambda = -\frac{f^{(m+1)}(r)}{m(m+1)f^{(m)}(r)}.$$

## Conclusiones

En este artículo se muestra que diversos métodos iterativos importantes pueden ser desarrollados de una manera común utilizando la interpolación polinomial. De este modo el orden de convergencia y la constante asintótica de cada método iterativo pueden ser halladas utilizando este desarrollo general, en contraste con los desarrollos comunes que pueden resultar más complicados

## Referencias

Burden, R. L. and Faires, J. D. (2011). Numerical Analysis. California: Brooks/Cole. Cengage Learning.

Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C. (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press.

Ostrowski, A.M. (1960). Solution of Equations and Systems of Equations. New York: Academic Press.

Ralston, A. and Rabinowitz, P. (1978). A First Course in Numerical Analysis, New York: McGraw-Hill.

Traub, J.F. (1964). Iterative Methods for the Solution of Equations. New York: Prentice Hall.

**Gustavo Fernández Torres**
**Francisco Rubén Castillo Soria**
Universidad del Istmo, Tehuantepec